Otimização Estratégica no Mercado Bancário: uma aplicação da teoria dos jogos e da programação matemática

Gustavo José de Guimarães e Souza
Mestre em Economia pela Universidade Federal Fluminense
Assessor do Banco do Brasil
gustavojgs@gmail.com

Renata Raposo Del-Vecchio
Doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro
Professora do Departamento de Matemática e Economia da Universidade Federal Fluminense
renata@vm.uff.br

RESUMO

A crescente disputa por clientes no mercado bancário, fomentada por diversos fatores, corrobora a relevância da estratégia a ser adotada para a conquista destes. A propaganda é um dos meios utilizado para tal fim. O presente artigo busca encontrar a estratégia ótima para o Banco do Brasil S/A, no que tange a escolha diária do tipo de propaganda a ser veiculada na mídia, visando especificamente à conquista de clientes de um banco concorrente. Para isto, emprega-se o arcabouço da Teoria dos Jogos, aliada à aplicação da Programação Linear. O conjunto ótimo de probabilidades conduz o Banco do Brasil a um resultado esperado médio de sete clientes conquistados por dia.

PALAVRAS CHAVE: Propaganda, Teoria dos Jogos, Programação Linear e Economia.

1 INTRODUÇÃO

Com o advento do Plano Real, o sistema bancário brasileiro, após um longo período de convivência com um regime de alta inflação, teve que se adaptar a um novo cenário. A disputa por clientes e, conseqüentemente, receitas se tornou mais acirrada.

Neste contexto o Banco do Brasil S/A (BB), uma instituição criada em 12 de outubro de 1808, enfrentava alguns problemas adicionais. Sua estrutura vinculada ao Governo Federal já havia sofrido grande modificação em 1986 quando este decidiu extinguir a Conta Movimento mantida pelo Banco Central, mecanismo que assegurava ao BB suprimento automático de recursos para as operações permitidas aos demais intermediários financeiros. Em contrapartida, o Banco do Brasil foi autorizado a atuar em todos os segmentos de mercado franqueados às demais instituições financeiras. Inicia-se, assim, a transformação do banco em conglomerado financeiro.

Em 1995, a empresa é reestruturada para se adaptar à nova conjuntura advinda do Plano Real e a conseqüente queda da inflação que afetou todo o sistema bancário. Para adequar o quadro de pessoal, foi lançado o Programa de Desligamento Voluntário (PDV), no qual 13.388 funcionários foram desligados neste mesmo ano. Paralelamente a busca de novos clientes se fez mais do que necessária.

A entrada de bancos estrangeiros e a crescente disputa por *market share*, em meados dos anos 90, tornou imprescindível a busca por novos clientes. Em um mercado competitivo a conquista de clientes da concorrência contribui para o aumento da participação de mercado por duas vias: pelo acréscimo de clientes e pela redução de clientes do concorrente. Outra forma possível de elevação do *market share* é pela conquista de clientes não-bancários, porém este aumenta também o tamanho do mercado, *ceteris paribus*.

Uma das formas de se conseguir tal objetivo é por via da propaganda e publicidade. Desta forma, o *marketing* de uma empresa pode ser determinante para esta conquistar clientes de outra. Isto pode ser obtido direta ou secundariamente, não obstante, a discussão a respeito de como a propaganda e a publicidade agem é suprimida por não fazer parte do escopo deste trabalho.

Destarte, o BB, objetiva por meio de anúncios na mídia à conquista de novos clientes e entre estes, clientes de seus rivais. A escolha, contudo, do tipo de anúncio a ser veiculado, é crucial no resultado. Ela determina em qual grau o objetivo de conquista de clientes foi ou não atingido. Muitas são as soluções propostas para este problema, desde o uso do conhecimento de especialistas no assunto até a aplicação de ferramentas e métodos de decisão sofisticados do ponto de vista acadêmico. No artigo propõe-se o emprego da Teoria dos Jogos aliada a Programação Linear.

O presente trabalho aborda apenas a conquista de clientes de um determinado banco concorrente, designado no que se segue por Banco X. O banco em questão é selecionado por sua semelhança em termos de atuação no mercado e estrutura. Os dados são oriundos de uma pesquisa de mercado contratada pelo BB.

Logo, busca-se encontrar o conjunto de estratégias ótimo para o BB, no que tange a escolha diária do tipo de propaganda a ser veiculada na mídia visando especificamente à conquista de clientes do Banco X.

Além desta introdução, o artigo encontra-se dividido em mais três seções. A segunda seção apresenta alguns aspectos acerca da teoria dos jogos para dois jogadores com soma constante; a terceira seção aplica o arcabouço teórico da teoria dos jogos e da programação linear para conquista de clientes no mercado bancário; e por último, é apresentada a conclusão.

2 TEORIA DOS JOGOS PARA DOIS JOGADORES E SOMA CONSTANTE

O jogo, no sentido que se trata aqui, ocorre quando vários agentes tomam suas decisões e o resultado depende do conjunto de decisões tomadas (são discutidos aqui apenas jogos de estratégia, ou seja, aqueles jogos que o resultado depende das escolhas dos jogadores – a estratégia. Esta escolha requer talento e com ele chega-se à solução ótima).

A Teoria dos Jogos é o estudo de problemas de decisão interdependentes, isto é, que envolvem vários agentes econômicos. De acordo com Chiang (1982) *um jogo é uma situação na qual dois ou mais participantes, os jogadores, confrontam-se em busca de certos objetivos – conflitantes. Sendo conflitantes é óbvio que os objetivos de todos os jogadores não podem ser simultaneamente alcançados.* A Teoria dos Jogos pode então ser definida como, a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito.

A discussão neste trabalho é confinada a jogos de soma constante com dois participantes. Apesar de se tratar de dois participantes não implica que existam apenas dois jogadores, no jogo aqui apresentado temos duas instituições financeiras constituídas por milhares de funcionários. As estratégias à disposição de cada jogador são consideradas finitas e conseqüentemente os resultados possíveis também. A cada par de estratégias corresponde um *payoff* (resultado), pois é o valor que o jogador paga ao seu oponente. O jogo constante (equivalente ao jogo de soma zero) implica que o ganho de um jogador é igual à perda do outro. É também restrita a atenção à classe de jogos estáticos de informação completa: um jogo tem informação completa se cada jogador conhece os *payoffs* dos outros jogadores; no caso de jogos de soma constante com dois jogadores, se o jogador sabe seu *payoff* necessariamente sabe o do outro jogador, ou seja, os *payoffs* são de conhecimento perfeito (*common knowledge*) entre todos os jogadores. Neste tipo de situação, os jogadores escolhem simultaneamente as suas ações, e recebem assim *payoffs* que dependem da combinação das ações escolhidas. Este jogo é dito então estático ou simultâneo. Apesar de dito que os jogadores escolhem as suas ações simultaneamente, é suficiente que cada jogador escolha a sua estratégia sem o conhecimento da ação de seu oponente, não é necessário que ambos tomem a decisão ao mesmo tempo.

Vale lembrar que o conhecimento ocorre apenas no âmbito dos *payoffs* e não das estratégias. A estratégia do oponente é desconhecida. O conhecimento da estratégia do adversário torna a resolução do jogo bastante simples. Para Mas-Colell, et al (1995) *a central concept of game theory is the notion of a player´s* ***strategy****. A strategy is a* ***complete contingent plan****, or* ***decision rule****, that specifies how the player will act in* ***every possible distinguishable circumstance*** *in which she might be called upon to move.* O processo de escolha da estratégia é, portanto, crucial para o resultado do jogo.

Com os conceitos citados acima, o jogo pode ser resumido em termos do *payoff* para um único jogador, uma vez que os *payoffs* podem ser positivos (ganhar e o oponente perder) e negativos (perder e o oponente ganhar). Esta matriz é conhecida como Matriz de Pagamentos. Conhecido o valor da soma constante e a matriz para qualquer um dos dois jogadores pode-se obter a matriz em função do outro jogador.

Adotando dois jogadores como J_1 e J_2 com *m* e *n* estratégias, respectivamente, o jogo pode ser representado por uma matriz de pagamentos (A):

		Jogador 2			
		s'_1	s'_2	...	s'_n
Jogador 1	s_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	s_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...
	s_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

A representação matricial acima indica que se o J_1 usa uma estratégia s_i e o J_2 usa uma estratégia s'_j , o *payoff* para J_1 é a_{ij} e conseqüentemente o *payoff* do J_2 é $-a_{ij}$.

A busca primordial na teoria dos jogos é por equilíbrio (pode-se, no entanto, encontrar equilíbrios múltiplos). Abaixo são apresentadas algumas maneiras de encontrá-lo. O primeiro passo, entretanto, é observar a presença de estratégias dominadas.

2.1 ELIMINAÇÃO DE ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS

Uma estratégia é estritamente dominada se existir, independentemente da ação do outro jogador, uma estratégia que gere um maior *payoff* ao jogador. Assim, o jogador racional nunca escolhe uma estratégia que lhe dê resultados piores do que às demais estratégias, ou seja, um jogador racional não escolhe estratégias estritamente dominadas, que podem de tal modo, ser abandonadas para simplificar o jogo.

Formalmente: *a estratégia pura s_{ik} do jogador i é estritamente dominada pela estratégia $s_{ik'}$ se: $u_i (s_{ik} , s_{-i}) < u_i (s_{ik'} , s_{-i})$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, para todo jogador i = 1,..., I, onde $u_i (s_{ik} , s_{-i})$ representa o payoff do jogador i quando ele adota a estratégia s_{ik} e s_{-i} as estratégias adotadas pelos outros jogadores.*

Exemplo1:

Jogador 2

		s'_1	s'_2	s'_3	s'_4
	s_1	10	8	11	12
Jogador 1	s_2	9	5	9	10
	s_3	11	7	8	11

A estratégia s_2 do J_1 é estritamente dominada pela estratégia s_1 , ou seja, todos os *payoffs* para o J_1 quando adota s_1 são superiores (melhores) que em s_2. Portanto não se justifica a adoção da estratégia s_2 (linha 2) pelo J_1 , assim basta eliminá-la. A matriz resultante é apresentada abaixo:

Jogador 2

		s'_1	s'_2	s'_3	s'_4
Jogador 1	s_1	10	8	11	12
	s_3	11	7	8	11

Vê-se que a s_2 domina as demais estratégias do J_2. Ela apresenta os menores (melhores, pois para este representa perda) *payoffs* para J_2 independente da escolha de J_1. Portanto as demais estratégias (colunas) podem ser eliminadas (outras ordens de eliminação também são possíveis, porém o equilíbrio final é o mesmo).

Assim a matriz é dada por:

Jogador 2

		s'_2
Jogador 1	s_1	8
	s_3	7

O equilíbrio é dado pela s_1 do J_1 e s'_2 do J_2, resultando em um ganho de 8 para J_1 e conseqüente perda de 8 para o J_2.

Portanto, jogadores racionais não jogam estratégias dominadas, pois se cada jogador age de forma a maximizar seus ganhos, não é possível fazer o outro jogador acreditar que uma estratégia que dê resultados inferiores seja a escolhida. Todavia, não são todos os jogos que são resolvidos por dominância de estratégias (alguns nem mesmo têm estratégia dominada). Permite-se igualmente falar em estratégias fracamente dominadas. Neste caso tudo se aplica da mesma forma só que ao invés da desigualdade estrita (>), temos a desigualdade ($\geq$) .

2.2 EQUILÍBRIO DE NASH

John Nash, ganhador do Prêmio Nobel de Economia (concedido em 1994), propôs uma definição de equilíbrio que se popularizou com o nome de Equilíbrio de Nash (EN). Este se define como o ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem. Esta contribuição surge de sua tese de doutoramento (Nash, 1950), na qual também é provada a existência de equilíbrio em jogos com mais de dois jogadores, que não sejam de soma constante. Abaixo é apresentado o EN.

Definição: *Dado um jogo simultâneo, as estratégias (s_1^*, ... , s_I^*) constituem um Equilíbrio de Nash se, para todo jogador i, s_i^* é a melhor resposta às estratégias especificadas dos outros jogadores, s_{-i}^*, i.e., se*

$$u_i\ (s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i\ (s_i, s_{-i}^*)\ ,$$

para todo $s_i \in S_i$, para todo jogador i = 1, ..., I.

De outra forma, pode-se definir as estratégias (s_1^*, ... , s_I^*) como um EN caso, para todo jogador i, a estratégia s_i^* resolva o problema de

$$\max u_i\ (s_i, s_{-i}^*)\text{ , escolhendo entre todos } s_i \in S_i.$$

Em outras palavras, pode-se dizer que um conjunto de estratégias constitui um EN se, caso todos os jogadores, menos um, joguem as estratégias definidas para eles no EN, para aquele outro não exista nada melhor a se fazer que também escolher a estratégia para ele definida no EN. E isso deve valer para todos os jogadores tomados individualmente.

2.3 PERFIL CONSERVADOR

Outra forma de encontrar a solução ótima de um jogo de soma constante e dois jogadores é pela utilização do conceito de maxmin e minmax. Estes conceitos baseiam-se no princípio da “melhor opção entre as piores”. Este princípio conservador, portanto, pressupõe jogadores avessos ao risco, ou, prudentes.

Bancos comerciais, são intermediários financeiros que têm nas transferências de recursos dos agentes superavitários para os deficitários sua atividade primordial. Logo, a administração de recursos de terceiros, a gestão do capital de acionistas (ou proprietários), o papel fundamental que desempenham no sistema de pagamentos, e a conseqüente importância dos mesmos para as demais atividades econômicas, são características que os conduzem para posturas conservadoras, sejam por iniciativa própria ou por regulação (Kaufman, 1991). Justifica-se assim a aderência desta postura conservadora para o contexto do trabalho. Abaixo é exemplificada tal estratégia.

Exemplo 2:

		Jogador 2			
		s'_1	s'_2	s'_3	s'_4
	s_1	8	-2	9	-3
Jogador 1	s_2	6	5	6	8
	s_3	-2	4	-9	5

A solução do ótimo na matriz de pagamentos acima pela adoção da postura conservadora seria:

		Jogador 2					
		s'_1	s'_2	s'_3	s'_4	MinLinha	
	s_1	8	-2	9	-3	-3	
Jogador 1	s_2	6	**5**	6	8	**5**	**Maxmin**
	s_3	-2	4	-9	5	-9	
	Max Colunas	8	**5**	9	8		
			Minmax				

O pior que pode ocorrer com o J_1 dadas as escolhas do J_2 são representados pelos mínimos de suas estratégias (linhas). Dado ao cenário pessimista o J_1 irá maximizar seu resultado (maxmin), que no caso é 5, ou seja, a adoção de s_2 . O pior que pode ocorrer com J_2 dadas as escolhas do J_1 são representadas pelos máximos de coluna. Assim o J_2, prudente, irá escolher a estratégia que minimiza sua perda, em que o ganho ou perda é dado pelo valor positivo ou negativo, respectivamente na matriz de pagamentos.

A solução ótima, então, é dada pelas s_2 do J_1 e pela s'_2 do J_2. O *payoff* é a favor do J_1 porque este tem um resultado positivo sobre o J_2 (por exemplo, ganha 5% do mercado do J_2). Utilizando a estratégia conservadora ou a estratégia dominante temos a solução 5, um ponto-sela.

O equilíbrio ocorre quando os dois jogadores ao otimizarem suas respectivas estratégias conservadoras obtêm o mesmo *payoff* na matriz de pagamentos. A solução de ponto-sela ocorre quando o maxmin de um jogador é o mesmo que o minmax do outro. Formalmente:

$$\max_i \min_j (a_{ij}) = \min_j \max_i (a_{ij})$$

Desta forma, os jogadores "concordam" com o resultado do jogo e o ponto-sela é a solução.

No caso de jogos de soma zero com dois jogadores esta solução, caso exista, é *EN*.

2.4 ESTRATÉGIA MISTA

Até aqui, supõe-se que cada jogador escolhe determinada estratégia de modo determinista, isto é, ele a escolhe ou não para jogar. Nenhuma possibilidade de randomização (aleatorização) entre suas estratégias possíveis foi discutida. Portanto, em jogos como Par ou Ímpar, ou Cara e Coroa, por exemplo, não encontramos nenhum conjunto de estratégias que constitua um EN. De fato, em todo jogo onde cada jogador quer "enganar" o(s) outro(s), não existe EN como definido antes, considerando apenas estratégias puras, porque a solução do jogo envolve incerteza a respeito do que o outro irá fazer. Para superar problemas como esse, insere-se a noção de estratégias mistas.

Definição 1: *Refere-se aos elementos de S_i como as estratégias puras do jogador i. As estratégias puras de um jogador são as diferentes ações que ele pode tomar.*

Definição 2: *Uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidade sobre (algumas ou todas) estratégias pertencentes a S_i . Caso $S_i = \{s_{i1}, \dots , s_{iK}\}$, uma estratégia mista para o jogador i é a distribuição de probabilidade $p_i = (p_{i1} , \dots , p_{iK})$, onde $p_{ik} \in [0, 1]$, para $k = 1, \dots , K$, e $p_{i1} + \dots + p_{iK} = 1$.*

Ou seja, uma estratégia mista especifica probabilidades para estratégias puras, denotando que essas serão escolhidas não de modo determinista, mas probabilístico. Obviamente, o somatório das probabilidades tem de ser um.

Uma estratégia pura nada mais é que uma estratégia mista degenerada, ou seja, que especifica probabilidade um para um elemento de S_i e zero para todos os outros.

Existem jogos na forma de estratégia pura que não são resolvidos por nenhum dos procedimentos de solução apresentados acima – dominância de estratégias e ponto-sela – como é o caso aplicado neste trabalho. No entanto, pode ser encontrado equilíbrio (EN) por via da randomização das estratégias possíveis.

Pelo Teorema de Nash:

Todo jogo finito (número de jogadores, I, finito; e número de estratégias, S_i , para todo i, também finito) com estratégias mistas admite pelo menos um equilíbrio de Nash.

Deste modo, para o tipo de jogos que está em análise neste trabalho sempre existe um EN com estratégias mistas.

Exemplo 3:

		Jogador 2	
		s'$_1$	s'$_2$
Jogador 1	s_1	10	7
	s_3	8	9

O jogo acima não apresenta nenhuma estratégia dominada. Não há ponto-sela (maxmin J_1 é 8 e o minmax J_2 é 9) considerando apenas estratégia pura. Portanto, a cada rodada os jogadores vão alterar suas escolhas visando à melhoria do resultado.

O problema agora está não em escolher a melhor estratégia e sim escolher o melhor conjunto de probabilidades para jogar cada estratégia ao longo do tempo. O J_1 pode escolher a probabilidade de 0,5 de jogar cada estratégia ou 0,25 de uma frente a 0,75 de outra, isto é, qualquer combinação que respeite a restrição $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ pode ser escolhida.

De acordo com Chiang (1982) *embora o objetivo de uma estratégia mista seja manter o adversário no escuro pela imprevisibilidade, ela não implica, de forma alguma, um padrão totalmente aleatório de jogadas*. Ao contrário, o jogador tentará um *mix* de estratégias que possa gerar um pagamento total ótimo no longo prazo.

Portanto, a escolha das freqüências de cada jogada deve ser definida por meio de um processo de otimização. Uma maneira de se obter as probabilidades ótimas é pela programação matemática. Este recurso, aliado a teoria dos jogos, é aplicado para solução de um problema real de conquista de clientes por uma instituição bancária.

3 APLICAÇÃO DA TEORIA DOS JOGOS E DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NA CONQUISTA DE CLIENTES

Inserido em um mercado bancário oligopolista, o BB, pretende maximizar a conquista de clientes provindos de seu concorrente o Banco X. Para isto, utiliza-se de propaganda na mídia em geral. Entretanto, três são as opções de foco do conteúdo, a saber: esportivo, cultural ou tradicional. O conceito de tradicional aqui adotado é, todo tipo de anúncio que não tenha enfoque esportivo ou cultural.

Anúncios do tipo padrão ou tradicional, que enfocam as vantagens de ser um cliente do BB, é representada pela estratégia 1. Anúncios que salientam a participação do BB no cenário cultural brasileiro, e a divulgação dos eventos nos Centros Culturais Banco do Brasil (CCBB), considera-se estratégia 2. E finalmente, anúncios que contenham alusão ao esporte patrocinado pelo BB, são considerados como estratégia 3. Esta divisão entre os três tipos é fundamentada no conhecimento *a priori* da estratégia de atuação do BB: cultural, desenvolvida por meio dos Centros Culturais Banco do Brasil e do Circuito Cultural Banco do Brasil; e esportiva desenvolvida por meio do Projeto Tênis Brasil e Vôlei Brasil. Para fins de simplificação não se diferencia os meios de comunicação como tv, revista, cinema ou mídia exterior (*outdoor*, painéis, entre outros).

Dado o diagnóstico de uso da mídia para divulgação da imagem do banco e conseqüente conquista de clientes, os dados apresentados na matriz de pagamentos abaixo (quadro 1) são referentes ao número de clientes que migram diariamente do banco concorrente em questão, Banco X, para o BB, segundo pesquisa amostral contratada por este último (para fins de segredo empresarial os valores foram alterados, não prejudicando porém, o intuito do trabalho).

As informações da pesquisa servem como *proxy* para os dados reais. O questionário aplicado contém algumas questões como: Quais são as qualidades que você espera de um banco? O que você considera como fator determinante na escolha de um banco? Quais atributos que você admira no banco concorrente e quais o fariam mudar de banco? Estas servem para identificar padrões de comportamento e preferências dos clientes. Ambos os bancos têm tarifas, rede de agências, portfólio de produtos e qualidade de atendimento similares, ou seja, são semelhantes nas principais características que determinam a escolha de um banco (o que enfatiza ainda mais a importância da diferenciação por meio da mídia). Deste modo, a partir das informações obtidas a respeito das preferências dos clientes dos bancos envolvidos na amostra conjugada ao tamanho da base de clientes dos mesmos são inferidos os valores constantes na matriz de pagamentos.

Quadro 1

Matriz de Conquista de Clientes

		Banco X			
		Não Anuncia	Tradicional	Cultural	Esporte
	Tradicional	**5**	10	8	6
BB	Cultural	9	**7**	8	**7**
	Esporte	7	8	**5**	9

O número de clientes conquistados pelo BB depende também dos anúncios veiculados diariamente pelo Banco X, ou seja, se este fez um anúncio de enfoque cultural, esportivo, tradicional ou mesmo se não anunciou.

No jogo específico, têm-se dois jogadores, BB e Banco X, resultado de soma constante (o que um ganha o outro perde), e supõe-se informação perfeita. Esta simplificação advém da possibilidade do Banco X, por meio de uma pesquisa estatisticamente fundamentada, obter os mesmos valores em média, dado o pressuposto que os dados são aproximações condizentes com a realidade. No caso acima não existe estratégia dominada para nenhum dos jogadores, além de não existir EN em estratégias puras (as melhores escolhas do BB dada cada escolha específica do Banco X são representadas pelos valores sublinhados, enquanto as melhores escolhas para o Banco X frente às escolhas do BB são representadas pelos números em negrito), o que significa que não existe ponto-sela, ou seja, maxmin=7 e minmax=8.

Na ausência do ponto-sela a estratégia ótima de cada banco é o anúncio cultural. Porém, o BB espera conquistar 7 clientes e conquista na verdade 8, motivando-o a adotar esta jogada novamente. Entretanto, o Banco X observa o BB adotar o anúncio cultural prefere anunciar com o enfoque tradicional ou esportivo, pois seu resultado melhora. Qualquer das escolhas do Banco X incentiva o BB para anúncios de cunho não cultural na jogada seguinte. Estas mudanças serão constantes.

Portanto, o presente trabalho busca encontrar o conjunto de estratégias ótimo para o BB, no que tange a escolha diária do tipo de propaganda a ser veiculado na mídia, visando à conquista de clientes do Banco X, especificamente. Paralelamente, é observada também qual o *mix* de estratégias ótimo do Banco X (no caso específico, o que minimiza a perda).

3.1 PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA OTIMIZAÇÃO DO CONJUNTO DE ESTRATÉGIAS

O valor esperado de um jogo com probabilidades para cada estratégia pode ser obtido da seguinte forma:

$$E(p,q) = p \cdot A \cdot q' = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & \ldots & p_n \end{bmatrix}}_{1xn} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}}_{nxm} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ \ldots \\ q_m \end{bmatrix}}_{mx1} = \text{escalar}$$

Para transformar um jogo em um problema de programação linear (função objetivo e restrições lineares como no caso da presente aplicação) têm-se os seguintes procedimentos:

Dada a matriz *A* suponha que a estratégia para o J_1 seja $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Caso o J_2 escolha a coluna j, o ganho esperado é $a_{1j} \cdot p_1 + a_{2j} \cdot p_2 + ... + a_{nj} . p_n$.

Se v é o mínimo dos ganhos, J_1 espera ganhar ao menos v, independente da escolha do J_2. Então,

$$
\begin{gathered}
a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + ... + a_{n1} . p_n \geq v \\
... \\
a_{1m} \cdot p_1 + a_{2m} \cdot p_2 + ... + a_{nm} . p_n \geq v
\end{gathered}
$$

O objetivo do J_1 é tornar seu ganho o maior possível, portanto ele busca $p_1, p_2, ..., p_n, v$:

$$
Max \quad v
$$

$$
sujeito \quad a \quad \begin{cases} v - (a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + ... + a_{n1} . p_n) \leq 0 \\ ... \\ v - (a_{1m} \cdot p_1 + a_{2m} \cdot p_2 + ... + a_{nm} . p_n) \leq 0 \\ p_1 + ... + p_n = 1 \\ p_1 \geq 0, \ ..., \quad p_n \geq 0 \end{cases}
$$

Assim, transforma-se a busca de solução do jogo em um problema de programação linear. Encontram-se então a estratégia ótima (*mix* das probabilidades) e o valor do ganho esperado do J_1. Analogamente pode-se encontrar *u*, o ganho esperado do J_2. Quando ambos os jogadores otimizarem as estratégias tem-se $v = u$.

A matriz de conquista de clientes (quadro 1) é uma matriz 3 x 4, na qual pode ser empregada a metodologia de programação linear para obtenção da estratégia ótima.

3.2 MAXIMIZAÇÃO DA CONQUISTAS DE CLIENTES PELO BB

Para cálculo do conjunto ótimo de estratégias por programação linear opta-se pela utilização da planilha eletrônica Excel 2002. Isto porque este software é de fácil manuseio e bastante difundido em todo mundo. Com o advento dos computadores, a resolução de problemas reais envolvendo matrizes de grandes dimensões torna-se acessível e rápida, sem a necessidade de complexos cálculos matemáticos efetuados manualmente. Por conseguinte, espera-se com este trabalho auxiliar a resolução de problemas reais por meio da teoria dos jogos de estratégia mista aliada à programação linear.

O problema de otimização para J_1 (Banco do Brasil) é dado então por:

$$
Max \quad v
$$

$$
sujeito \quad a \quad \begin{cases} v - (a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + a_{31} \cdot p_3) \leq 0 \\ v - (a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 + a_{32} \cdot p_3) \leq 0 \\ v - (a_{13} \cdot p_1 + a_{23} \cdot p_2 + a_{33} \cdot p_3) \leq 0 \\ v - (a_{14} \cdot p_1 + a_{24} \cdot p_2 + a_{34} \cdot p_3) \leq 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0 \quad e \quad p_3 \geq 0 \end{cases}
$$

Para encontrar os valores ótimos das variáveis de decisão (p_1, p_2, p_3, *e* v), foi impostado na ferramenta Solver da planilha Excel, a função objetivo e as devidas restrições expostas acima, além da matriz de conquista de clientes (quadro 1).

Os valores otimizados para J_1 são:

$p_1 \cong 0{,}052632$; $p_2 \cong 0{,}736842$; $p_3 \cong 0{,}210526$ e $v \cong 7{,}368421$.

Analogamente, considerando-se o problema de otimização para J_2 (Banco X), onde (q_1, q_2, q_3, q_4) é o vetor de probabilidades e *u* o ganho esperado de J_2, obtemos os seguintes valores otimizados para J_2:

$q_1 = 0$; $q_2 \cong 0{,}157895$; $q_3 \cong 0{,}368421$; $q_4 \cong 0{,}473684$ e $u \cong 7{,}368421$.

Vê-se que, $v \cong u \cong 7{,}368421$. Logo, a adoção do conjunto ótimo de estratégias pelo BB gera em média ao longo do tempo a conquista de aproximadamente sete clientes do Banco X. O resultado positivo demonstra que este jogo é imparcial, ou seja, ele favorece ao BB.

Os percentuais ótimos por tipo de anúncio que geram a melhor estratégia para cada instituição bancária são apresentados abaixo:

			Banco X			
	Tipo de Anúncio		*Não Anuncia*	*Tradicional*	*Cultural*	*Esporte*
		Mix	**0%**	**16%**	**37%**	**47%**
	Tradicional	**5%**	5	10	8	6
BB	*Cultural*	**74%**	9	7	8	7
	Esporte	**21%**	7	8	5	9

Portanto, o BB deve alterar sua estratégia de publicidade com base na seguinte distribuição de probabilidades: 74% dos dias anunciar com enfoque cultural; 21% dos dias enfocar sua participação no patrocínio do esporte nacional; e apenas 5% dos dias em publicidade tradicional.

O Banco X visando a minimizar a perda (no caso específico) deve em quase metade das vezes (47%) atuar com *marketing* esportivo; em 37% dos dias fazer propaganda cultural; e nos 16% restantes dos dias anunciar de forma tradicional. A opção de não anunciar deve ser ignorada pelo Banco X para otimização de sua estratégia (0%).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disputa crescente por clientes no mercado bancário, fomentada por diversos fatores, corrobora para o aumento da relevância da estratégia a ser adotada, no que tange a conquista destes clientes. O processo de definição de quais ações tomar requer talento. O uso da teoria dos jogos conjugada às tecnologias de programação matemática, contribui para a escolha da estratégia a ser tomada. Com base em informações de como suas propagandas afetam os clientes do Banco X, o BB opta, no exercício acima, a concentrar seus anúncios na área esportiva e cultural (95% dos dias).

As possibilidades de aplicação da teoria dos jogos conjunta à programação matemática, para solucionar problemas de natureza econômica, são diversas. A teoria dos jogos para dois jogadores no que tange a sua aplicação em análise de duopólio é óbvia. Mesmo no caso de oligopólio ou mercado competitivo o segundo jogador pode ser considerado todos os demais oponentes. A programação matemática, por sua vez, auxilia a otimização tanto de problemas com funções e restrições lineares quanto não-lineares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORTOLOSSI, H. *et al*. (2005) *Uma introdução a Teoria dos Jogos*. 57ª Reunião Anual da SBPC, Universidade Estadual do Ceará, julho.

CHIANG, A. (1982) *Matemática para economistas*. São Paulo: McGraw-Hill.

DEL-VECCHIO, R. R. (2005) *Notas de aula*. Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal Fluminense.

HANEKE, U & SADDI, V. (1995) Prêmio Nobel de Economia de 1994: Contribuições de Nash, Harsani e Selten à Teoria de Jogos. *Revista de Economia Política*, vol. 15, nº (57), 58-69.

KAUFMAN, G. (1991) *Banking Structures in Major Countries*. Kluwer Academic Publishers.

MAS-COLELL, A; WHINSTON, M. D; GREEN, J. R. (1995) *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.

NASH, J. F. (1950) *Non-Cooperatives Games*. Princeton University.

ORNELAS, E. A. R. (2004) *Apostila de Teoria dos Jogos – Quarta Versão*. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

VARIAN, H. R (2000). *Microeconomia: princípios básicos*. Rio de Janeiro: Campus.